金融と数学

——金融に於ける数学研究とその応用——

野村證券 金融工学研究センター

大本 隆

2008/3/10　(改訂　2011/1/11)

本稿の内容は，著者本人に属するものであり，野村證券株式会社の意見を示すものではない．[1]

1　概論

本論では，最初に導入として数理ファイナンスの成り立ちと動機付けを述べ，次に，金融の諸問題と確率論や関数解析との接点，及びデリバティブの数理に関する応用数学としての具体的なケースを幾つか紹介し，金融と数学の関係と課題点を俯瞰する．

1.1　金融の数理

金融とは英語では finance であるが，その定義は明確ではなく多義的でさえある．例えば,「金融」以外に様々に和訳される[2]．数学者は数理ファイナンスの意味で言い，銀行家や企業金融の人は「資金調達」，経済や会計の人は「財務」と呼ぶ．語感から言えば，経済学と金融（ファイナンス）は，巷では同義語として認識しているかもしれないが，ニュアンスはかなり異なる．

世間一般では，金融と数学は到底かけ離れた存在と考えられていることであろうが，実際には，実務で数式を扱う頻度は意外に大きい．例えば，債券価格 $f(T,r)$ は金利 r と満期 T を変数とする非線形な関数であり，債券の価格変動のリスク値（の二乗）は二次形式 $x^T\Sigma x$ の形をとる．これらを分析し理解するには当然乍ら数理解析の力を要する．オプション等のデリバティブでは，より高度な数学を扱うことになり，ブラック・ショールズ・モデル以上に複雑な確率微分方程式を扱う局面にも遭遇する．このようにクオンツ等の専門家にとっては，このような金融と数学の間の結び付きは歴然としており，その間に介在する三つの研究分野として，保険数理・数理ファイナンス・金融工学が挙げられる.「保険数理」ではリスクの計量など，昔から数学・統計学を使って分析を行ってきている．一方，比較的歴史の浅い「金融工学」では，数学は単なる道具の一つとみなされており，むしろ IT 技術や統計学，財務，会計，法律が大切と理解している人々もいる.「数理ファイナンス」はどうかと言えば，最近では数学の一分野と見なされているようである[3]．

2006 年に第 1 回 Gauss 賞を受賞された伊藤清博士（1915 − 2008）による「伊藤の補題（伊藤公式）」や「伊藤のマルチンゲール表現定理」といった拡散過程（ブラウン運動を用いて記述される確率過程）に関する二つの有名な定理は[4]，数理ファイナンスでは勿論，金融工学あるいは金融

[1] 2008 年の国際シンポジウム「イノベーション創出と数学研究」での発表及び [35] に基づく．

[2] 例えば，金融庁は Financial Services Agency（FSA），財務省は Ministry of Finance（MOF）である．

[3] ファイナンスは学問としては歴史が浅く，数学的に厳密であっても，枠組やその前提など，内部無矛盾のチェックや公理系の未整備，経済原理として相応しいか否かの議論，など詰めの甘さが残る領域とも言われる——プラグマティックに，ドラスティックに様々なものを捨象するからこそ興味深い結果が得られる，という言い方もできようが．

[4] 20 世紀初頭にバシェリエとアインシュタインがほぼ同時期に，ブラウン運動のモデル化に言及した．20 世紀中葉には伊藤積分による「伊藤の確率解析（Itô calculus）」が確立し，後に，半マルチンゲール（semi-martingale）の理論，マルコフ過程の研究が進んだ．

の実務でも日常茶飯事的に用いられている．些か冗談めいて聞こえるが，ウォール街では伊藤清博士を経済学者と誤解している人もかなりいたらしい[5]．ファイナンスでは数学を直接的に扱うこともあるので，今日では，世界的に有数の数学者が積極的にファイナンスの分野に参入してきている[6]．前世紀末より，かつての物理学と数学の相互作用のように，数学にとってファイナンスが物理学の役割を一部担いつつあると言っても過言ではない．

しかし，言うまでもなく，現実世界の経済活動は当然、物理法則に従う自然現象とは異なる．物理定数は不変だが，経済学やファイナンスでいうモデルのパラメータ推定（キャリブレーション）は非定常である．第一，物理学でのパラダイム・シフトは数十年間隔くらいで起きる程度だが，ファイナンスではもっと頻繁に起きるものであり，モデルの流行廃りも激しい．とはいえ，実務上はキャリブレートしない訳にはいかない[7]．些か誇張して喩えれば，重力定数やレイノルズ数が変動する中で，無理矢理にでも航空機を飛ばすのが金融工学と言える．重力定数が二倍になり得るので最初から燃料を二倍積めばいい，という話にはならない．自由競争下ではコストを度外視した経営ではライバル航空会社に駆逐されるからである（ブラック・スワンを待ち続ける訳にはいかない）．

1.1.1 資産価格付けの基本定理

次に，デリバティブ・プライシングに纏わる，数学と金融の関係を俯瞰したい．言うまでもなく，デリバティブ価格付けでは同値なマルチンゲール測度が重要な役割を果たすため，測度変換は暗黙の形にせよ，実務で日常的に使われており——恰もシェークスピアの戯曲「以尺報尺（Measure for measure)」さながら，多種多様な同値マルチンゲール測度が用いられている．

ここで,「標準理論」とも言うべき「資産価格付けの基本定理」について簡潔に述べておくと[8]．

1. 無裁定（No arbitrage, arbitrage-free）であるとは[9],「フリーランチ（タダ飯)」が存在しないことを意味しており，もしリスクファクターを中立にしてエクスポージャーをとらないようにすれば，リスクフリーレート（無リスク金利）でしか儲からない．つまり，ノーリスク・ノーリターン（超過リターンを追求するのであれば，自然とリスクに晒される）——このとき,「(実測度と）同値なマルチンゲール測度[10] が存在する」(資産価格付けの第一基本定理)．

2. 市場完備性は関数空間でいう完備性（completeness）の概念と同じであり，任意のデリバティブを複製するような，リスクフリー資産とリスク資産（一次資産という）による許容可能な自己金融取引戦略が存在する（伊藤積分での表示)，ということである[11]．このとき，先の同値なマルチンゲール測度は一意的に特定される（資産価格付けの第二基本定理)．

[5]一説には近年，伊藤先生がノーベル経済学賞の有力な候補になっていたとも言われる．ナッシュの例もあるから実現したかもしれない（もっとも，伊藤先生の本意にはそぐわなかっただろうが)．金融という実学に応用される前に，伊藤積分と確率解析は物理数学，統計力学，最適制御論，生物学などの諸分野に応用されている．

[6]特にマリアヴァン解析（ウィーナー空間上の解析学）など確率解析や関数解析の周辺では，日本人数学者らによる多くの優れた業績が認められており，少なくとも学術的な意味では，日本の数学・数理ファイナンス研究の貢献度は非常に高かったと，世界では評価されている（おそらく，国内以上に)．

[7]calibration は逆問題の一種である．実務家の中には，キャリブレーションさえ正しく出来れば（有限個の市場価格に合えば)，モデルは何だって構わないと極論する人さえいる．

[8]ハリソン・クレプス・プリスカを嚆矢とする資産価格付け第一及び第二基本定理は，90 年代に欧州の数学者達によって，ヨーロッパ型及びアメリカ型についての標準理論として確立した．標準理論は信用リスクや流動性リスク，取引コストや情報の非対称性，部分情報は捨象した，言わば「理想気体」の様に理想化された市場での議論である．昨今ではしかし，これらの要件も重要視され，バックグラウンドやポジティブ・フィードバックなども研究されている．

[9]裁定/無裁定の考え方はファイナンス理論では実は古くからあり，裁定価格理論 APT（ロス)，MM（モジリアニ・ミラー）命題の基礎となっている．

[10]基準財（ニューメレール）で除した，任意のデリバティブを含む任意の資産の相対価格が全てマルチンゲールとなるような（元の測度と）同値な測度．この測度への変換係数（ヤコビアン）が RND である（ルベーグ積分の枠組では，絶対連続関数にはほとんど到るところで微分可能であるが，この微分が RND なのである)．

[11]マルチンゲール表現定理は，ヒルベルト空間でのリースの定理に類するもの（一次資産の線形和で表される)．

測度変換について[12]，RND(Radon-Nikodym Derivative) を定義するためには，実は原資産価格が正値でありさえすればよく（例：エッシャー変換等），半マルチンゲールの理論に一般化できる．但し，多次元・半マルチンゲールの確率解析では更に精緻な数学を要する[13]．市場が完備で無い場合（非完備市場），同値マルチンゲール測度 $\{\mathcal{Q}_\lambda\}$ を一意に特定する何かの基準が必要になる[14]．リアル・オプション等では非完備だけでなく無裁定さえも成り立たないケースが出てくる（実務では，完備市場以外は到底扱わない——もっとも，そう置いただけの話なのだが[15]）．また，ドリフト係数や拡散係数が状態変数や確率過程になっているモデル（確率的なキャリーコスト，ボラティリティ・スキュー（LV や SV）などを含む）は，確率解析では自然な設定であるが，キャリブレーションの問題（逆問題）が整合的か否か（ill-posed でないとか）が問題となる．金融工学の研究者が開発する連続時間モデルの中には，数学的には破綻しているものがある．

1.1.2　幾何ブラウン運動（対数正規拡散過程）の枠組

最も数学的にリッチで，手計算による解析も容易だったのが，ブラック・ショールズ・モデルの枠組である（原資産価格に対数正規を仮定したモデル——便宜上 BS モデルと呼ぶ）[16]．適当な変数変換で,（ドリフトのない定数拡散係数の）最も単純な拡散過程に翻訳され，これは拡散方程式ないし熱伝導方程式の確率論的解釈に繋がる．

数学的に言えば，この枠組（対数正規，幾何 Brown 運動）は解析的に扱い易く，確率微分方程式（SDE）にラプラス変換（指数分布に従うランダム時刻を用いる）を導入すれば，局所時間や逆正弦則などエキゾティック・バリア・オプション（global time barrier option 等）他に応用可であり，初期到達時刻のみならず最終脱出時刻の問題も解析的に解かれる．そもそも鏡像原理は，拡散方程式と拡散過程の双方で発展した議論であり，鏡像原理（reflection principle）を用いてスタンダード・バリア・オプション価格を計算できる[17]．1 次元正規分布関数の精度の良い高速な解析近似法が知られており，また，1 次元拡散過程の上に書かれたオプションについての閉形解（closed form solution）——分布関数を所与として解析的に厳密解が得られる問題が数多くある，特に対数正規の場合はそうである[18]．この対数正規の利点を生かして，90 年代以降，ブラック・モデルは金利モデルなど様々な形で実務に応用されていき，基準財（ニューメレール）を割引債とする同値マルチンゲール測度（フォワード測度）など LMM の理論に結実することになる[19]．

ところで，マートンは伊藤解析を用いてブラック・ショールズ・モデルを演繹したが，原著者の二人は連続時間モデルを直ちに採用していた訳ではなく（そちらはマートンの業績），むしろ離散

---

[12] CMG（Cameron-Martin-Girsanov）/丸山定理は，マルチンゲール表現定理や時間変更などと並んで，デリバティブ価格付けの基礎的なツールであり，多岐に亘り適用されている．測度変換と価格付けは，相互に密接な関係にある．

[13] 近年，レヴィ過程（加法過程）への一般化の研究も進んでおり，数値計算もある程度可能なレベルとなってきてはいるが，パラメータ推定やヘッジの有効性，リスク計測など実務に耐えうるかどうかは別の話である．

[14] 無裁定だけだと，同値マルチンゲール測度 $\{\mathcal{Q}_\lambda\}$ が無数に存在するため，一意的な価格が決められない．同値マルチンゲール測度を特定する基準として，MEMM(Minimal Entropy Martingale Measure) などがある．また，mean-variance hedge 等の議論もある．

[15] 複製不能なケースは，保険とか天候デリバティブ，大地震などの CAT（大規模災害）デリバティブ等に見られる．

[16] 厳密解の解析がしやすいことを経済学者は tractability が高いという．その他に，計算は大変だが，平均回帰過程（特に単純な OU（Ornstein-Uhlenbeck）過程や Bessel 過程）も興味深く，HW（Hull-White, Vasicek）や CIR（Cox-Ingersoll-Ross）——典型的な affine 級スポットレート金利期間構造モデルや Heston モデル（SV）等の適用例がある．

[17] ドリフト 0 の過程となるように測度変換してから鏡像原理を適用，その後で逆変換する．ダブルバリアの場合（級数になる）あるいは下方 KI&上方 KO などの例がある．

[18] 正規分布（Brown 運動）で記述するモデルは，正値性に欠けるものの，対称性は保たれ，tractability が高く，スプレッド（差）や負値を取り得る参照指標の場合に用いられることがある．対数正規と正規の混合分布で歪みを表現することも考えられる．

[19] 更に，基準財としてアニュイティ（スワップ測度）や実質債（実質金利測度），ターミナル測度（末端の満期に合わせる），スポット測度（リスク中立測度に準じる）について，あるいは，為替レート，コンベクシティ調整やタイミング調整などの理論に測度変換が重要な役割を果たすことになった．

時間的な枠組で，株価の対数正規（log-normal）は仮定するが[20]，CAPM（市場均衡論の一種）を利用して，ブラックショールズ偏微分方程式（BS-PDE）を導き，満期でのペイオフ（終端条件）の下でこれを解いた[21]．このPDEは，伊藤解析を援用したマートン流の導出法によっても簡単に導かれる[22]．対数正規は実は本質的な仮定ではなく，より一般の拡散過程に拡張することができる．

1.1.3 二項ツリー・CRRモデル

チュートリアルとしては，BSモデルの数年後に提示された二項モデル——特にCRR（コックス・ロス・ルービンシュタイン）モデルが大変に優れている（これにも幾つかのバージョンがある）．ランダム・ウォーク（random walk）[23]に類似した二項ツリー（格子）を使った，離散近似解を算出するモデルである．二項ツリーとは1時間ステップ進む都度，上昇と下降の二状態にしか推移しない構造である．多期間二項ツリーは一期間二項ツリーの組み合わせであり[24]，

- バックワード・インダクション——後退時間方向の条件付期待値計算
- フォワード・インダクション——推移確率あるいはArrow-Debreu証券の価格計算[25]

のいずれにも適用できる．ヨーロピアン型の場合，いずれの手法でも同じ価格（現在価値）を導く．ところが，n期間二項ツリーでは，終末での状態数は2^n個であり，莫大なコンピュータ・リソースを要するため，事実上計算不能である．そこで，全てのパスの情報を維持することを諦め，状態ノードの再結合をとって，$n+1$個の状態数に激減させた二項ラティス（格子）で問題を解く——これをCRRモデルと言うが，各状態グリッドにはそこに到る全ての経路からの寄与の総和となる．原資産価格にMarkov性があり，経路独立なペイオフの場合であれば，特に支障はない[26]．もう一つ注意すべき点であるが，数値解法の大きな主題として，誤差の問題（数値解の収束安定性，精度等）が存在する．これには離散近似の誤差，丸め誤差等の複合的な要素が絡んでくる[27]．

実務上，否応なく数値として算出する必要があるので，様々な近似解法や数値解法の進化が求められてきた．昨今の複雑なデリバティブ評価は計算コストが嵩み，コンピュータ・リソースに頼ることになるため，グラフィック，マルチコアCPU，メモリ空間の増大，大量で高速な通信技術，スクリプト言語などのプログラミング技術，グリッド計算やデータ・グリッド，クラウド・コ

[20]株式のリターンが正規分布に従う，という仮定であり，経験分布は裾が厚く，尖度の高い，下方にスキューした分布になる（暴落する事象の存在を示唆する）．

[21]CAPM（Capital Asset Pricing Model）は実務でも，企業財務論（corporate finance）で標準的に扱われる均衡論であり，マーコヴィッツの平均分散法（MVA）からの帰結である．市場のリスクプレミアムに対するレバレッジ（いわゆるβ）のみが対リスクフリーレートの期待超過リターンを生む源泉であり（したがって，個別銘柄の固有期待リターン：$\alpha = 0$）——ブラック自身，熱心なCAPM信奉者でもあった．

[22]二階の楕円型・放物型PDEの確率論的解法に留意する．本来は確率論的に解くべき問題であって，自己金融取引で複製戦略の存在を示し（マルチンゲール表現定理），無裁定から複製ポートフォリオと当該デリバティブが等価であることを示す（結果的にデルタヘッジ戦略になる）．これはより広い枠組であり，PDEが適用できない範囲の問題もカバーする．

[23]コインの表(H)—裏(T)で± 1ステップ状態が推移する．ランダム・ウォークについての中心極限定理による弱収束極限がブラウン運動である．実務上で使える理論とは，離散版に堪えうるような連続時間モデル，という言い方もできる．

[24]CRRモデルは唯一のリスク資産S_tとリスクフリー資産N_tから構成される完備市場のモデルである．無裁定の仮定より，デリバティブの複製ポートフォリオ：$V_t = \psi_t S_t + \phi_t N_t$を構築する初期コストがデリバティブ価格に等しい．

[25]所定の条件が特定の時刻の状態で生じたときのみ1円を支払い，それ以外のケースは何も支払わない，一種のディジタル・オプション．

[26]二項ツリーはパスの履歴全ての情報を持っているので，エキゾティック（パス依存型）・ペイオフを支払うエキゾティック・オプションにも適用できる．二項ラティス（CRR）はその情報を喪失しているが，ファイナンスで見られる弱い経路依存性の問題であれば，多少の工夫と変形で解けたりもする．但し，CRRはチュートリアルであり，デリバティブの実務で駆使している訳ではない（それでも，概念的に重要な教訓を得られる）．

[27]プレミアム（価格）に関して，プレーンバニラについては，10桁程度の有効桁数を持つ閉形解が得られる場合もあるが，エキゾティック物では高々4桁の有効桁数でも充分である．とは言え，この程度でも計算コストが甚大になるケースがあり，有限差分でのグリークスやリスクを計算する段階では，より繊細な議論を要する．

ンピューティングーーといった IT 技術が，近年益々注目を集めているそれと答応する形で，数値計算の研究開発は，解析近似から PDE 解法（Tree/FDM），モンテカルロ法（QMC を含む）へと時代とともに主流が変わりつつあるのだが，いつの時代でも高度な数学が使用されてきた．

1.1.4　プレーンバニラ・オプション

エキゾティック・デリバティブの価格付けは興味深い課題であったが，今世紀になって，むしろ「プレーンバニラ（Plain-Vanilla）」—— 最もシンプルなペイオフを持つヨーロピアン・オプションの研究が重視され，高度なモデル開発が為されてきた[28]．プレーンバニラ（ヨーロピアン）オプション・プレミアム価格をボラティリティとして翻訳すると（離散的な観測データを補間/補外して）インプライド・ボラティリティ・サーフェス $\Sigma(K,T)$ を形成する[29]．これは，今世紀に入って俄然注目されるようになった「ボラティリティ・スマイル/スキュー」という現象である．言うまでもなく，これは何も BS モデルを市場参加者（トレーダー）が信じている証左ではない．マーケットでは IV のスキュー等が観測されるので，むしろ BS モデルを信じていないと言うべきである．一種の慣習上のルールとして，あるいはコミュニケーション・ツールとして BS モデルを使っているに過ぎない（σ の水準の幅にコンセンサスが形成され易く，価格よりも感覚的に捉えやすいためにそうする）．

昨今，CDO 評価などで問題視されることの多い，正規（ガウシアン）コピュラ・モデル（静的なモデルであり，相関構造のある動的なダイナミクスを導入しにくい）についても，全てが単一の相関係数，ということではなく，メザニン・トランシェ毎にインプライド相関を定めるのだが，「コリレーション・スキュー」という現象がマーケットで観測される[30]．言い換えれば，BS モデルにせよ，コピュラ・モデルにせよ，市場価格を翻訳するため，インプライド・ベースでのパラメータを使ってインディケーションしているのに過ぎないのであって，背後にどのようなモデルが用いられているか，というのはまた別の話である．

とはいえ，実務では如何なるモデルであろうが，キャリブレートしない訳にはいかない．ヒストリカル・データで推定したパラメータで代用する方針もあるが，マーケットの市場価格としてインプライされているものを使うべきという教義は，本当は必ずしも確からしくはないのではあるが（多分に誤解や誤謬から来ている部分もあり得る）．それでも，トレーダーでもリスク管理者，監査法人や規制当局の間でも金科玉条の如く罷り通っている．何故なら，エキゾティック・デリバティブを評価し，原資産やプレーンバニラでヘッジして，リスクやエクスポージャーを相殺するためには，評価に用いる確率モデルとパラメータが同じである必要があるためである．とは言え，包括的な評価モデルが一つあれば済むというほど単純な話でもない．単一資産を原資産とする単一のデリバティブであっても，ディスカウント項に確率過程（金利期間構造やクレジット・スプレッド）が介在するとか[31]，基準財の取り替えに伴う測度変換や最適停止時刻，ランダム時刻（例：デフォルト時刻）などとか，コーラブルやプッタブルなどコンパウンド・オプションでは，問題は一層難し

[28]以下の三点に留意：i) 市場価格にはマーケットの将来の期待形成が取り込まれ，ii) プレーンバニラの流動性は高く，市場価格の情報が入手可能（エキゾティックの市場価格は不透明なケースがある），iii) プレーンバニラでは難解なモデルを扱うこともある（エキゾティックでは敢えてモデルを単純化することもある）．

[29]ヨーロピアン・オプションに関するブラック・ショールズ（BS）モデルを用いて，市場価格（プレミアム）から逆算されたインプライド・ボラティリティ（IV）を用いて，売り値段や買い価格の呼値とする．

[30]メザニンやコール・スプレッドの場合はそれぞれ，相関やボル（volatility）について単調増加でないため，インプライドの値が多価になったりする．そのため，複数のエクイティ・トランシェ毎のインプライド相関を定める——これらを「ベース相関」と呼称する．

[31]発展方程式，推移作用素（半群）とその固有値問題も重要な関連がある．リー群，バナッハ空間，微分幾何（リーマン幾何）なども重要なアイテム．

くなり，実装の難しさ，計算コストも甚大になる――損益（P/L），リスク，必要自己資本を計算するため，PV（現在価値）だけでなくリスク量も日々計算しなければならない．

1.2 最近の潮流

周知の如く，サブプライム問題に端を発し，リーマンショックに繋がるバブル崩壊と信用収縮そして一連の金融危機を経て，金融の高度化が決して予定調和的な安定をもたらすものではなく，新古典派経済学の市場原理主義も蹉跌を来すことが明らかになった．このため，近年では世界的に，金融工学や数理ファイナンスに対する風当たりも強くなってきている．そもそも最初から，数学や数理科学的アプローチを否定する論旨も見られる．

もっとも，こうした指摘の殆どは合理的な説明ではなく，金融危機をもたらしたサブプライム問題は，数学はおろか金融工学としても――この種の問題を助長させ，拡散させたというアンプリファイアーかブースターとしての問題点は多々あろうが，大量破壊兵器の元凶という誹謗中傷が不当なのは明白だろう[32]．これが主たる問題の本質と呼ぶには当たるまい．それより問題の本質はむしろ，数理科学による「金融の高度化」・「市場の効率化」・「市場参加者の経済合理性」が果たして実現可能なのか，というところにある．

1.2.1 金融危機と金融の数理

それでは，こうした金融危機が繰り返し起こるのかというと，所詮人間の為せる業ということではあるけれども，一つには金融にしろ数学にしろ，難しくて傍目からはよく分からないということがある[33]．その一方で，目前の利益を優先するあまり，曖昧な理解のままで（乃至は，潜在的リスクは無視して）物事を先へ先へと進めてしまうことは実社会では珍しいことではない．皆が動くと波に乗り遅れまいとする群集心理的な側面もあるし，市場の流動性は有限であるため，自らの行動がポジティブ・フィードバックを掛けてしまうこともある．

敷衍すれば，何もこれは金融工学に限った話ではなく，近代科学を用いた technology（工学技術）全般に見られる傾向かもしれない．装置産業的にブラックボックス化するとは，半ば意図的に複雑化させているのではないのかも知れない．換言すれば，客観性や整合性，透明性やトレーサビリティを欠くところは，かなりあり得るのではないだろうか．しかし，品質の維持や向上，安全性と言う観点はコスト負担を強いるものである．アダム・スミスの時代とは較べるもないまでに複雑化した金融の機能を分業体制にすると必然的にインセンティブや利益相反の問題が発生し，合成の誤謬や余計なエージェンシー（agency）コストを抱えてしまった，ということなのかもしれない．複雑なデリバティブを内包した金融商品にありがちなケースであるが，情報の非対称性に拍車を掛ける事態に陥ったと言えよう．

あるいは，また，数学的な記述を単純化し過ぎた，あるいは，本来複雑な話を歪曲した，という側面もあり得る．こうした事を克服するには，そこはやはり原典に立ち返るというか，金融の実務と経済や数学等の学術界との協働・交流により，お互いの知識や理解を深めることが必要と思われる．もう一つには数学リテラシーの強化であり，これは金融や会計，法律，IT のリテラシーと同様の事情である．何もクオンツは数学者であるべきということでないが，大学院の数学科で厳密な数学教育を受けた人材がある程度，金融に必要である事は疑う余地がない．

[32] この種の問題を論じるのは割愛するが，メディアの風当たりは強いが，些か論点がずれている風情も伺える．

[33] 人々は，期待効用最適化に基づく経済合理性とはかけ離れた行動原理を持ち，むしろ心理学的な要素がある（例：行動経済学）という指摘もよく聞かれるようになった．言わば，新古典派やリバタリアニズムに対するアンチテーゼというところであるが，単に認識論，現象論に過ぎないという見解もある．

数学では，余計な挟雑物を捨象することで導かれるものが本質的で美しい結果，ということであるが，単純すぎる前提では物事の本質から外れていってしまう危険もある．数理的にテクニカルな問題に執着しすぎるあまり本質を見失う恐れもある．第一，実社会で直面する問題はそう綺麗な話だけでなく泥臭い．物事の解決策の大半はトレード・オフであり，一方を立てれば他方を失う．数学の様に白か黒かで判別できない．結局は常識と妥協の積み重ねになりがちである．

しかし，時として稀には，breakthrough や innovation に遭遇するケースも実際にあり，そうした局面では疑いなく，数学が大変に役立ってきた．何らかの規制強化が為されたとしても，基本路線として，資本主義経済・自由主義経済の下での「金融の高度化」が今後ともに継続するのであれば，不断の数学的なイノベーションが金融業にも不可欠と言えるだろう．

2 Appendix

2.1 数理ファイナンス

本章では，若干の数式を織り交ぜ，幾つかの詳細を含め，前章の内容を補足解説したい．金融の実務で数学に最も関わりの深い分野とは，言わずと知れた「デリバティブ・ビジネス」である．ペイオフ関数でキャッシュ・フローを規定するところなど，数式を使わずには済まされない業務が到るところに介在する[34]．商品設計や資金決済でも一定の水準の数学的素養を要する（トレーディング，リスク管理，モデル・クオンツなどは当然に必要）．金融の高度化につれ，数学的な要件が膨張して来ているのは必然的な流れである．

「時価とは何か」という本質的な問題はさておくとしても，時価評価 (Mark to market) とリスク管理——ポジションの時価評価 (PV)，P/L の要因分解を行い，リスク量とそれに見合う必要な自己資本を計算し，リザーブ（準備金）や担保管理を行う機能は，トレーディング・ビジネスの基本であるが[35]，これらのオペレーションを遅滞なく日々運用しなければならない．

前述の様に，高度な数学——多項式近似，漸近展開や確率解析（確率微分方程式の離散近似，高速な Greeks の計算法など）が実務上での課題として，現実に導入されている．しかし，数学的な厳密さを追求するには，大学院数学科で学ぶ数学をかなり若い時期に学んでおく必要がある——L.Schwartz 言うところの「涙無しの数学はなし」．勿論,「再入門」と称して，大学院などで実務経験者に習熟する機会を提供したり，カリキュラムを整えることは可能で，取り敢えず「正解」が存在する問題ではそれで十分である（経済学でも高々そのようなレベルで議論されることが多い）．とは言え，研究開発や新機軸を求めるのであれば，更にその上の水準を要することになる

[34] 近年は，包括的モンテカルロ・シミュレーターとして，ペイオフを script 言語で記述し数値計算する枠組が，顧客向けにカストマイズしたエキゾティック・デリバティブが仕組まれた金融商品（ストラクチャード・プロダクツ）を組成し提供する投資銀行に浸透しつつある．こうしたアイディアは一貫性・適切性・安定性の観点では諸刃の剣であるが，ポートフォリオ・ベースの統一的評価がしやすく，整合的なモデル構築とペイオフの独立性を保ち，分散処理がしやすい．但し，従来型の商品毎，カテゴリー毎に異なるモデルを個別に実装した評価関数ベースのシステムも有力な候補であり，相補的な関係にある．確率論的手法にせよ PDE 解法にせよ数値解法では，漸近展開（asymptotic expansion），greeks の高速な計算法，摂動（perturbation）やキャリブレーション（calibration）とか，数学的に興味深く実務上重要な課題に注目が集まっている．

[35] 古の簿価評価から時価評価（mark to market）への移行は自然な流れであり，よりグローバル化した潮流であって止めようがない．しかし，エキゾティック物や低流動性の商品の時価の定義は自明ではない．米国会計基準 FAS157 では，流動性の水準によってレベル 1〜3 の三段階に分類しており，レベル 3 は低流動且つエキゾティックな仕組商品（structured products）のクラスになる．

2.1.1 金融数理——デリバティブの価格付け

まず最初に,「伊藤の補題（伊藤公式）」と「伊藤のマルチンゲール表現定理」を再掲すると，任意の滑らかな関数 $F(x)$ について（$x \in \mathrm{R}^d$），以下の (2.1) 式が，及び，任意の連続なマルチンゲール M_t について，二乗可積分な関数 ψ（取引戦略）が存在し，(2.2) 式が成り立つ．

$$dF(X) = \sum_{i=1}^{d} D_i F(X) dX^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} D_i D_j F(X) d \langle X^i , X^j \rangle \tag{2.1}$$

$$M_t - M_0 = \int_0^t \psi_u \cdot dX_u \tag{2.2}$$

但し，X_t, Y_t は Brown 運動，下式の積分は伊藤積分（確率積分）．また，$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\,(i = 1, \cdots, d)$，$X$ の二次変分を $\langle X \rangle$ とし，X, Y の共変分を $\langle X , Y \rangle = (\langle X + Y \rangle - \langle X - Y \rangle)/4$ で表す．ここで，ストラトノヴィッチ（Stratonovich）の確率積分[36]

$$X \circ dY = X \cdot dY + \frac{1}{2} dX \cdot dY$$

を導入して，上段の伊藤公式を翻訳すれば,

$$dF(X) = \sum_{i=1}^{d} D_i F(X) \circ dX_i$$

と表され，Newton の古典的な微積分と同じ形になる．

測度空間 $(\Omega, \mathcal{Q})$ から同値な測度空間 $(\Omega, \tilde{\mathcal{Q}})$ への測度変換について，RND（Radon-Nikodym Derivative）を定義するためには，配当の無い資産価格 X_t が可積分で正値であればよく（Esscher 変換等），

$$\left(\frac{d\tilde{\mathcal{Q}}}{d\mathcal{Q}} \right)_{t,T} = \frac{X_T}{E^{\mathcal{Q}} [\, X_T \mid \mathcal{F}_t \,]}$$

とする．これは，X_t が半マルチンゲールの場合に一般化できる．但し，多次元・半マルチンゲールの確率解析は精緻な数学を要する．完備で無い場合（非完備市場），同値マルチンゲール測度を一意に特定する何等かの基準が必要になる．リアル・オプション等，非完備だけでなく無裁定さえ成り立たないケースもある．とは言え，実務では完備市場以外は到底扱わない——単に，そう措いているだけの話ではあるが.

例えば，$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$ という SDE で書かれるとき（W_t は測度 $\mathcal{Q}$ の下での標準 Brown 運動），リスクフリー資産を基準財（numéraire）N_t として除した相対価格で再定義したデリバティブの価格は（満期 T での payoff $f(T, X_T)$ も同様とする），

$$V_t = E^{\mathcal{Q}} [\, f(T, X(T, x)) \mid \mathcal{F}_t \,] \quad (0 \le t \le T) \ , \ \mathcal{F}_t = \mathcal{N} \vee \sigma(X_u, u \le t)$$

と表される[37]．ここで，$\mathcal{F}_t$ とは X_t のパスの履歴から生成された自然なフィルトレーションに零集合を含めた σ-加法族である．当然，条件付期待値は tower property；

$$E^{\mathcal{Q}} [\, V_T \mid \mathcal{F}_t \,] = E^{\mathcal{Q}} \left[\, E^{\mathcal{Q}} [\, V_T \mid \mathcal{F}_\tau \,] \,\middle|\, \mathcal{F}_t \,\right] \qquad (0 \le t \le \tau \le T)$$

[36] Stratonovich 積分における被積分関数の代表点の取り方は，伊藤積分の様な左端点ではなく区間 $[t_{j-1}, t_j]$ の中点であって（対称化），見た目，伊藤公式から二階微分の項が消失する．これは伊藤積分と違ってマルチンゲールにはならない．しかし，幾何的には都合良く，多様体上の確率流や Lie 群など幾何学的な特徴を生かせる対称化の枠組といえる．

[37] 楠岡近似等の先端的な数値計算法も条件付期待値 $E^{\mathcal{Q}} [\, V_{t+\Delta t} \mid \mathcal{F}_t \,]$ を如何に効率的に，精度良く高速に計算するかに尽きる．多項式（polynomial）を用いた数値積分も同様．Hermite 多項式等は $\mathcal{L}^2$-基底を張り，特殊関数にも関連する．

を満たすが，これをバックワード・インダクション（backward induction）で計算するには，この条件付期待値 $E^{\mathbb{Q}}[\,\cdot\,|\,\mathcal{F}_\tau\,]$ の積分計算を高速且つ高精度で収束安定性の高い離散近似がどうすれば可能になるか，が問題の核心となる（例：楠岡近似等）．また，拡散作用素 A の発展方程式は（拡散半群 e^{tA} を形成）

$$\frac{\partial u}{\partial s} = A\,u(s,x)\ ,\ A = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\sigma_{ij}D_iD_j - \sum_{i=1}^{d}\mu_i D_i$$

と表され，この初期値問題の解を与える（$s = T - t$ として）[38]．

また，ドリフト係数 μ や拡散係数 σ が状態変数の関数や確率過程になっているモデル—— 確率的なキャリーコストや期待成長率，ボラティリティ・スキュー/スマイル（LV や SV）などは，確率解析では自然な設定であるが[39]，キャリブレーションの問題（逆問題）が整合的か否か（ill-posed でないとか）が問題となる．金融工学者が開発する連続時間モデルは数学的には破綻しているものがある[40]．ヒストリカル・データによる経験分布にフィットさせるパラメータ推定もキャリブレーションではあるが，金融実務ではマーケットで観測可能な市場価格に合わせることを「キャリブレーション（calibration）」と称する．具体的には,

1. 現時点で観測される金利期間構造（term-structure）を Libor やスワップレートから，リスクフリーなゼロ・クーポン・レートを算出——割引債価格（ディスカウント・ファンクション）を計算する[41]．

2. フォワード価格や先物価格，オプションの put-call パリティ等から，ドリフト（リスク中立測度の下での期待成長率），キャリーコストやクレジット・スプレッド を計算する．

3. プレーンバニラ（ヨーロピアン）・オプション市場価格（即ち，インプライド・ボラティリティ・サーフェス）から，ボラティリティ・スキュー・モデルのパラメータ推定

4. エキゾティック物の市場価格が入手可能な場合（比較的定型化され，流動性がある場合）あるいは複数資産から形成されるデリバティブ価格が入手可能の場合，ボラティリティや相関係数，修正項に係わるパラメータ推定を行う．

といった手順を踏む[42]．プレーンバニラやヘッジ・インストルメントの市場価格を既知として，キャリブレートされたモデル・パラメータで算出したエキゾティック・オプション価格のグリークスを利用すれば，ヘッジ量やリスク量を合理的に見積もることが出来る[43]．デリバティブ・プライシングの実務では，評価モデルの構築のみならずキャリブレーションの構成やリスク量の評価法が本質的に重要と考えられている．

---

[38] ディスカウント項を含む場合，$A - rI$ の形の固有値問題など，乃至は，金利の期間構造モデル（平均回帰性やボル，相関の構造），クレジット・リスクを勘案したモデルなど，株式（エクイティ）のモデルより一段と難しくなる．

[39] 更に，局所マルチンゲールとか半マルチンゲールの問題，SPDE や BSDE などの複雑な確率微分方程式の枠組のモデルがある．尚，二次変分 $\langle\cdot\rangle$ はノルムの二乗，共変分 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は内積に相当し，Hilbert 空間上の関数解析になる（Banach 空間上の幾何学や作用素論も扱う）．Malliavin 解析とは Wiener 空間上の解析学であり，楠岡-Stroock 理論へと繋がる．

[40] 例えば，連続時間に於ける BDT モデル等，対数正規の金利過程では，リスクフリー資産が確率 1 で有限時間で爆発する．

[41] 担保（コラテラル）やファンディング，カウンターパーティ・リスクを考慮したスプレッドを調整したタームストラクチャーも含む．CDS スプレッド（プレミアム）から，生存確率関数（survival probability）を推定するのもキャリブレーションの一種．

[42] フィッティングの程度も，金融商品やモデルの特徴，市場価格の質や件数に応じて差があり，割引債では数ベーシスの誤差であるがボラティリティでは%水準となることもある．

[43] 実際上大きな問題となるのは，観測可能な市場価格は有限個であることで（全く見えていないこともある），キャリブレーションでは補間や外挿が本質的な場合がある．ヘッジのパフォーマンスやモデル・パラメータの安定性/信頼性，評価モデルの良し悪し（モデル・エラー）など，議論すべき余地もかなりある．

ここで，物理とファイナンスの問題の性質の違いを考えてみると，端的に言えば，物理数学では，非線形微分方程式や作用素を扱う局面もかなりあるが，その多くは低次元の問題であり，しかし境界条件は比較的単純である．対して，ファイナンスで扱う問題では，線形の微分方程式や作用素ではあるが，場合によっては高次元の問題であり，また，一般に境界条件は複雑である．

デリバティブ価格付けには，極端に言えば，取引可能な 1 次資産（有価証券）を原資産とする場合と，金利などの金融指標（それ自体は資産ではない）を参照指標とする場合の二通りがあって，モデリングの特徴に違いが見られる．前者は，エクイティなど原資産（有価証券）を用いた複製戦略と無裁定から導かれるデリバティブ価格付けであるが，後者つまりマクロ経済的な金融指標を参照するデリバティブでは，リスク中立化法を用いる——価格評価のための確率測度は天下り的であり，モデルのニュアンスが異なる（例：HJM や BGM/J（LMM）などの金利期間構造モデル）[44]．

2.1.2 Black-Scholes モデル再訪

最も数学的にリッチで，手計算による解析も容易だったのが，Black-Scholes（B-S）モデル，即ち，対数正規（幾何 Brown 運動）の枠組である．適当な変数変換で,（drift のない定数拡散係数の）最も単純な拡散過程に翻訳され[45]，拡散方程式，即ち，熱伝導方程式の確率論的解釈を適用できる．数学的には，Black-Scholes モデル（対数正規拡散過程）の枠組は解析的に扱いやすく（tractability が高いという）[46]，多少一般化した B-S モデルの枠組では，リスク中立測度 $\mathcal{Q}$ の下での 1 次元標準 Brown 運動を W_t で駆動される株価（原資産価格）S_t についての SDE を以下で仮定する．

$$\begin{cases} S_t = f_t\, M_t \\ M_t = \dfrac{d\tilde{\mathcal{Q}}}{d\mathcal{Q}} = \mathcal{E}_\sigma(W_t) = \exp\left[-\displaystyle\int_0^t \frac{\sigma_u^2}{2}du + \int_0^t \sigma_u dW_u\right] \\ f_t = S_0 \exp\left[\displaystyle\int_0^t (r_u - q_u)du\right] = E^{\mathcal{Q}}[\, S_t\,] \end{cases}$$

但し，リスクフリーレート r_t，キャリーコスト q_t（連続複利での配当利回り，レポ・レート），ボラティリティσ_t とする．$M_t = (d\tilde{\mathcal{Q}}/d\mathcal{Q})_t$ は指数マルチンゲールであり，$\tilde{\mathcal{Q}}$ は配当含みの原資産をニューメレールとする同値なマルチンゲール測度である．f_t が有界変動か M_t と独立とすると，

$$\frac{dS_t}{S_t} = \frac{df_t}{f_t} + \frac{dM_t}{M_t} = (r_t - q_t)\; dt + \sigma_t dW_t$$

が成り立つ．半マルチンゲール Z_t で一般化すると，上式の $\sigma_t dW_t$ の代わりに dZ_t を代入したもの（$dM_t/M_t = dZ_t$）となる．更に，S_t には離散配当落 d_t があり得るし，デフォルト・リスクもあって，その場合は必ずしも非負ではなくなる（デフォルト時刻 τ では，$S_\tau = 0$）．即ち，affine 形式：$S_t = f_t M_t - d_t$ などの形をとる displacement に，$1_{[\tau > t]}$ を乗じたものである[47]．

[44]フォワードレートの金利期間構造モデルとしては，HJM（Heath-Jarrow-Morton），BGM/J（Brace-Gatarek-Musiela/Jamshidian）が有名．離散テナーの BGM は LMM（LIBOR market model）と言われる．

[45]SV や Lévy 過程（sub-ordinate 過程）の場合でも，適当な時間変更で，単純な拡散過程に翻訳可能．

[46]正規分布の密度関数を用いた基本解の構造が単純であるため（Markov 性つまり推移律に注目），ヨーロピアン型やスタンダード・バリア，ダブルバリアの閉形解（closed form）が存在する．バリア・オプションのグリーン関数や生存確率，到達時刻の分布も解析しやすく，ルックバックやラチェット等の閉形解を持つ様々なエキゾティック・オプションが知られる．

[47]関連して，拡散係数（ボラティリティσ_t）や確率的金利 r_t や確率的配当 q_t のモデルや jump-diffusion 型のモデルもある．また，エクデリや新株予約権（種類株式，優先株，CB）では評価手法の考え方に違いがあり，無裁定を前提とする場合でも，ジャンプや拡散過程についてのリスクの見方が異なる（ドリフトとディスカウントについての議論）．

確率微分方程式（SDE）にラプラス変換（指数分布に従うランダム時刻を用いる）を導入すれば，局所時間や逆正弦則などエキゾティック・バリア・オプション他に応用可能であり，初期到達時刻のみならず最終脱出時刻の問題も解析的に対処できる．そもそも鏡像原理は，拡散方程式の解と拡散過程のパスの双方で成り立ち（相互に関連している），推移確率若しくはBrown運動についての鏡像原理より，スタンダードなバリア・オプションの解を求められる[48]．1次元正規分布関数 $N(\cdot)$ の精度の良く高速な解析近似法が知られているので，1次元拡散過程についての閉形解（分布関数を所与として得られる解析的な厳密解）が知られている問題は数多く，特に対数正規（幾何Brown運動）の場合はそうである．この対数正規の利点を生かし，1990年代以降，Blackモデルは金利モデルなど様々な形で実務に応用されていき，割引債を基準財（numéraire）とする同値マルチンゲール測度（フォワード測度）などLMMの理論に結実することになった．

拡張したB-S偏微分方程式（PDE）は伊藤公式（伊藤のlemma）による直接的な導出ができる．裁定取引を行うアービトラージャーから見た自分のポジションをデルタヘッジ $\frac{\partial V_t}{\partial x}$ し，レポ取引，ファンディング，運用金利，ロールを含め，採算が合う価格（無裁定価格に準じる概念）でPDEを立てる．これに終期条件（時間反転すれば初期条件）やディリクレ条件（KOバリア H に相当）を賦課したPDEの境界値問題を解くことになる．PDE解法は，経路依存の問題を直接扱うのは不得手であるが，KI（Knock-In）の問題は，他の条件を一定として，プレーンバニラ＝KO+KIが成り立つ――初期到達時刻 $\tau = \inf\{u \geq 0 | S_u = H\}$ として，$1 = 1_{[\tau \leq T]} + 1_{[\tau > T]}$ が成り立つから，直接KIの問題を解くのではなく，プレーンバニラからKO成分を控除する解法も又，有効である．

任意の $x \in \mathrm{R}$ に対し，$x^+ = \max\{x, 0\}$，$x^- = -\min\{x, 0\}$ として，$x = x^+ - x^-$，$x^- = (-x)^+$，$|x| = x^+ + x^-$ は常に成立．恒等式：$S_T - K = (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+$ を得る．両辺の期待値をとってディスカウントすると，put-call parity : $S_t - KD(t,T) = C_t - P_t$ を導く（$D(t,T)$ は割引債価格）．以上の関係式はモデル・フリーであり，S_t の確率過程に依存せず常に成り立つ．

2.1.3　数値解法

ところで，多項treeについては，二項ツリーは完備市場のモデルであり（しかし，三項ツリーはそうではない――陽的差分スキームは自然な着想と言えるが），リスクフリー資産とリスク資産（Δt だけ時間が進むと二つの状態が生じる）の満たすべき連立1次方程式の解として，リスク中立確率とデルタヘッジ戦略が導かれる．多期間モデルは1期間モデルの組み合わせであり，典型的な多項treeでは状態は再結合する設定となる．Brown運動についての伊藤公式（伊藤のlemma）が導かれるように，ランダム・ウォーク（二項モデル）についての離散伊藤公式（離散時間・離散状態版の伊藤公式）も成り立つ[49]．しかし，実務的にはツリー（Tree）といっても三項ツリーかFDM（確率論では前者，物理数学では後者を好むらしい），若しくは解析ツリー（analytic-tree）ないし数値積分（DE，GQ等）を用いたbackward inductionが扱われる（MF，LGM等）[50]．

また，二項ツリーの考え方はオートマティックな早期償還条項（連続時間参照乃至は離散時間参照バリアの問題) と捉えることもでき，またデフォルト時刻を意味する停止時間 τ を導入すれば，生存確率や事象を表すこともできる．

[48] 一旦，drift 0の過程となるように測度変換してから鏡像原理を適用，その後で逆変換する．PDEでも，Dirichlet問題とかNeumann問題などで類似の手法がある．この他にも調和解析や拡散半群，OU過程など確率解析との関連が深い，確率解析については，他にも，Bessel過程, Brownian Bridge, Gamma過程，時間変更などがファイナンスで用いられる．

[49] 数学的な取り扱いの良さから，拡散過程の枠組―― 連続時間/連続状態のモデルが扱われることが多いが，半マルチンゲールの枠組は数学的には簡単ではない．一方，離散時間/離散状態では，単に離散近似というだけでなく本質的な意味での課題が別途ある．連続の枠組でも離散の枠組でも正当化できる問題が，本来扱われるべきファイナンスの問題と言える．

[50] Markov Functional model（nonparametric LVの一種），Linear Gaussian Markov modelの略．

アメリカン条項（概ね，バミューダ条項）の場合には，変分不等式ないしは自由境界値問題（確率論でいえば最適停止時刻問題）について，離散化したバックワード・インダクティブに（後退方向に逐次的に）Bellman 方程式を解くことになり，ある種の最適制御問題を解く[51].

例えば，停止時（stopping time）$\tau \in \Lambda_{t,T}$ でのペイオフ H_τ とし,（割引）行使価値 $\Phi_t = H_t/N_t$,（割引）継続価値 Ψ_t としたとき，時点 t でのアメリカン型の現在価値は[52],

$$\frac{V_t}{N_t} = \sup_{\tau \in \Lambda_{t,T}} E^{\mathcal{Q}}\left[\left.\frac{H_\tau}{N_\tau}\,\right|\, \mathcal{F}_t \right] \simeq \sum_{u=t}^{T-\Delta t} E^{\mathcal{Q}}\left[\left.(\Phi_u - \Psi_u)^+ \,\right|\, \mathcal{F}_t \right] + E^{\mathcal{Q}}\left[\, \Phi_T \mid \mathcal{F}_t \,\right]$$

と表される．右辺第一項は早期行使プレミアムを各期間に分割した寄与である．ここで,（割引）継続価値 $\Psi_t = E^{\mathcal{Q}}\left[\, \max\{\Psi_{t+\Delta t}, \Phi_{t+\Delta t}\} \mid \mathcal{F}_t \,\right] = E^{\mathcal{Q}}\left[\, \Psi_{t+\Delta t} \mid \mathcal{F}_t \,\right] + E^{\mathcal{Q}}\left[\left.(\Phi_{t+\Delta t} - \Psi_{t+\Delta t})^+ \,\right|\, \mathcal{F}_t \right]$ は，backward inductive に逐次的に求められる（PDE 解法）.

また，経路依存性（パス依存性）のある場合は，冗長で補助的な状態変数を余分に導入し（エクストラ次元）マルコフ性を保たせた，多層ツリーの問題に帰着させる（行使価格が経路依存（ラチェット型），複数回期中行使（スウィング型）等）．実は，これだけでもかなりの種類の実務的問題はカバーできるのだが，状態空間の次元数が高い場合やエキゾティック性が複雑すぎる場合には，当然ながら不適切で[53]，その場合にはモンテカルロ法などのフォワード・インダクティブに（前進方向に逐次的に）パスに沿った手法で解かれる．しかも近年では，ハードウェアやソフトウェアの進化により，モンテカルロ法を応用したアメリカン・オプション評価（LSM など）も一般的になってきた．こうした数値計算技術の向上に伴い，コンピューテーショナル・ファイナンスという分野も認知されるようになった[54]．乱数や，準乱数（QMC）あるいは LDS（差異の小さな点列）と呼ばれる数値積分法（他にも，GQ，DE 等の低次元積分がある），多項式（polynomial）近似やスプライン補間，射影や回帰といった基礎的なところから先端的な，例えば，rough path，cubature や楠岡近似など，確率解析の”cutting edge”な先端的趣向もある．これ以外にも，数値計算上の細かなトリックや大胆な大仕掛け，様々な創意工夫など，計算手法の研究開発は日進月歩といえる.

2.2 様々な例題

別の意味で，端的な例を幾つか取り上げてみよう.

2.2.1 オプションに関する例題

第一の例は，パスポート（passport）・オプションと呼ばれるプロダクトで，かつてはバンカース・トラスト銀（後にドイツ銀に吸収合併）で取引されていた．原資産（株や為替）は B-S モデル（対数正規）だが，その取引勘定（trading account）の上に書かれたオプションは，とある二階の非線形な偏微分方程式の解になる[55]．このとき，原資産を記述する SDE は，実は分布の意味での

[51] 効用関数最適化は，ポートフォリオの動的最適化や，非完備市場でのデリバティブ価格付けにも用いられる．リスク鋭敏型最適化やリスク尺度（risk measure），大偏差（large-deviation）等についても関連した主題がある.

[52] 通期を Δt 間隔で離散化したので，本来はバミューダ型である．バリア型（Dirichlet 問題）の場合と比較されたい.

[53] 非完備市場で取引コストが掛かるファイナンスの問題などでは粘性解と呼ばれる PDE の意味での弱解（超関数の意味での弱解ではない）の枠組も用いられる.

[54] モンテカルロ法はパス本数を分解して（自明ではない）グリッド計算の並列処理に適用しやすい．近年，グリークス（偏微分）の数値計算法として，path-wise greek 法（双対法:smork-adjoint 法），likelihood ratio 法（Malliavin greeks）なども研究されている.

[55] 非線形 PDE 問題（楕円型/放物型）として Hamilton-Jacobi-Bellman（HJB）方程式の粘性解（viscosity solution）というアプローチがある．粘性解は非線形 PDE の弱解の一種で（超関数の意味での弱解とは素性が異なる），最大値原理（比較定理）や上半連続（USC）・下半連続（LSC），最適制御，半群生成，非線形関数解析に関する一連の議論がある．粘性解はファイナンスの問題にも応用され，例えばガンマやベガ制約下での HJB 問題もある．粘性解は bid/ask(offer) などギャップを伴う不連続な経済学の均衡の問題にも使える（USC 包/LSC 包，粘性劣解/粘性優解）.

一意性しかない，弱解しか存在しないSDEとして有名な典型例の（局所時間に関する）田中の方程式 $dX_t = \mathrm{sgn}(X_t)\,dB_t$, $X_0 = 0$ を導く[56].

第二の例も上記に類似した話題だが，f を凸関数にまで一般化した「伊藤-Meyer-田中の公式」が知られている[57]．ヨーロピアン・コールのペイオフ $(x-k)^+ = \max\{x-k, 0\}$ など $x = k$ で（古典的には）微分不能な点を持つ折線関数やディジタル・オプションなどの不連続なペイオフがあるが，数学的に正当化できるやり方で（一般化した）伊藤公式が適用できる．つまり，超関数の意味での微分（弱微分）として（部分積分を応用して），

$$\frac{\partial}{\partial x}(x-k)^+ = -\frac{\partial}{\partial k}(x-k)^+ = 1_{[x>k]}\ ,\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x-k)^+ = \frac{\partial}{\partial x}1_{[x>k]} = \delta(x-k) \tag{2.3}$$

が成り立つ．これより，次の命題に注意する．

命題 1（Breeden-Litzenberger の公式）

x, y を任意の非負実数とし，$f \in C^2(\mathrm{R}^+)$ とする．このとき，以下の式が成り立つ．

$$f(y) = f(x) + f'(x)\,(y-x) + \int_0^x f''(k)\ (k-y)^+\,dk + \int_x^\infty f''(k)\ (y-k)^+\,dk$$

したがって，$dL_t^k = \delta(X_t - k)d\,\langle\, X_t\,\rangle$ として[58],

$$d\,(X_t - k)^+ = 1_{[X_t \geq k]}dX_t + \frac{1}{2}dL_t^k$$

ここで，リスク中立測度 $\mathcal{Q}$ での期待値をとれば，推移確率密度が満たすべき前進方程式が導かれ，更に最も典型的なLV（局所ボル）モデルでのDupire公式――局所ボルとIV（Implied Volatility）のサーフェスの紐付け，を導く（LVは整合的な逆問題．しかし，デルタ・ヘッジは問題含み）.

第三の例はデルタ，ガンマなどのグリークスに関するもので，第二の例の結果からも導けるが，直接的にも示される．プレーンバニラ（の満期 T での将来価値）の行使価格 K についての二階微分 $\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}$ が，原資産価格 X_t の推移確率密度を表すことが分かる――B-Sモデルで仮定する幾何Brown運動（対数正規）に限らず，LV（局所ボラティリティ）$\sigma(t, X_t)$ やSV（確率ボラティリティ）$\sigma_t = g(t, Y_t)$ に従うなど一般の拡散過程で成り立つ式である．この，プレーンバニラ（ヨーロピアン）のオプション価格（プレミアム）をボラティリティとして翻訳すると（離散的な観測データを補間/補外して，インプライド・ボラティリティ・サーフェス $\Sigma(K, T)$ を形成する），今世紀に入って注目されるようになった「ボラティリティ・スマイル/スキュー」という呼び方になる.

また，先渡価格 $X_t = \frac{S_t}{D(t,T)} = E^{\mathcal{Q}^T}[\,S_T \mid \mathcal{F}_t\,]$ のモデルによらず（S_t のMarkov性，cádlágは仮定する）[59]，プレーンバニラ，ここではヨーロピアン・コール（の将来）価格について，

$$C_t = E^{\mathcal{Q}}\left[\,(X_T - K)^+\,\middle|\,\mathcal{F}_t\,\right] = E^{\mathcal{Q}}[\,(X_T - K)1_A \mid X_t\,] = \frac{\partial C}{\partial X}X_t + \frac{\partial C}{\partial K}K$$

が常に成り立つ――リスク資産とリスクフリー資産の自己金融取引による複製戦略（デルタヘッジ）の式である[60]．但し，$A = \{\omega \in \Omega \mid X_T(\omega) > K\}$．$\omega \in \Omega$ を固定化し，古典的な連鎖律から,

---

[56]SDEの弱解には，パス毎（path-wise）の一意性はなく，分布の意味での一意性しかない．弱解とマルチンゲール問題には関連があり（SDEとPDEでの弱解は，全く別物），強解と弱解の相違は，ヘッジの観点でも興味深い（ファイナンスの論文では，大概，強解の存在する十分条件を仮定する）.

[57]局所時間 L_t について田中の公式に関連した議論になる．尚，有界な凸関数はほとんど到るところ二階微分可能である.

[58]$1_A = 0\,(A$ が偽$)\,|\,1\,(A$ が真$)$:指標関数，$\delta(\cdot)$ はDirac測度，$\langle\,\cdot\,\rangle$ は二次変分.

[59]確率過程 X_t がcádlágとは，X_t がRCLL（右連続で左極限を持つ）であること（欧州と米英の用語の違い）.

[60]本来は，$C_t = \frac{\partial C}{\partial X_t}X_t + \frac{\partial C}{\partial K_t}K_t$, $K_t = N_t E^{\mathcal{Q}}[\,K/N_T \mid \mathcal{F}_t\,] = KD(t,T)$ と書くべき（割引債 K_t は資産だが，K は違う）．$dC_t = \frac{\partial C}{\partial X_t}dX_t + \frac{\partial C}{\partial K_t}dK_t =$ (伊藤公式) から基礎PDEを導く（$dK_t/K_t = rdt$, $\mathcal{Q}^T = \mathcal{Q}$）.

(2.3) 式より，上式の偏微分も形式的に計算できる[61].

$$\frac{\partial C}{\partial X} = E^{\tilde{\mathcal{Q}}}[\,1_A\,] = \tilde{\mathcal{Q}}(A)\ ,\ \frac{\partial C}{\partial K} = -E^{\mathcal{Q}}[\,1_A\,] = -\mathcal{Q}(A) \qquad \left(\frac{d\tilde{\mathcal{Q}}}{d\mathcal{Q}} = \frac{X_T}{E^{\mathcal{Q}}[\,X_T\,]} \right)$$

第四の例は，Hagan の SABR モデルの一種であり，リスク中立測度 $\mathcal{Q}$ の下で，先物価格 X_t，ボラティリティ σ_t が局所的に対数正規型のモデルである[62].

$$\frac{dX_t}{X_t} = \sigma_t dW_t\ ,\ \frac{d\sigma_t}{\sigma_t} = \nu dB_t\ ,\ \langle dW\,,\,dB\,\rangle = \rho dt$$

特異摂動の漸近展開により（LV, SV にも適用可．Malliavin 解析での類似の議論が可能）[63]，プレーンバニラなヨーロピアン・オプションについては B-S 公式を応用して表現することができる．尚，X_t は $\rho \le 0$ ならばマルチンゲールであるが，$\rho > 0$ ではマルチンゲールにならない（有限時間で blow-up する）．その場合でも，X_t は局所マルチンゲールであり，優マルチンゲールである[64].

第五の例は，モデル・フリーなバリアンス・スワップであり（一種のバリアンスのフォワードと言える），先物価格 $F_t = E^{\mathcal{Q}}[\,S_T \mid \mathcal{F}_t\,]$ が $\frac{dF_t}{F_t} = \sigma(t,\cdots)\,dW_t$ という拡散過程で生成される場合（但し，$\sigma(t,\cdots)$ は任意の確率過程），log-contract $\ln F_t$ について伊藤公式より，

$$\frac{1}{2}\int_0^T {\sigma_t}^2 dt = \frac{F_T}{F_0} - 1 - \ln\frac{F_T}{F_0} + \int_0^T \left(\frac{1}{F_t} - \frac{1}{F_0}\right) dF_t$$

を導く．幾つかの計算を経て，プレーンバニラ・オプションの加重平均としてのバリアンス・スワップ価格を得る．命題 1 に留意すれば，これは実質，下式と同等である（$F_0 = f(0,T)$ は現在の先渡価格）.

$$E^{\mathcal{Q}}\left[\frac{1}{2}\int_0^T {\sigma_t}^2 dt\right] = \int_0^{F_0} \frac{P(T,K)}{K^2}\,dK + \int_{F_0}^{\infty} \frac{C(T,K)}{K^2}\,dK$$

第六の例は，CDO 評価などで近年問題視されることも多く,「悪魔の公式」とも揶揄される正規コピュラ（Gaussian copula）モデルについても[65]，正規分布確率変数 X_t^i が次の同時分布が閾値 x_i 以下かどうかをシミュレートする．($\exists x_i \in \mathrm{R}$ s.t. $\mathcal{Q}(\tau_i < t) = \mathcal{Q}(X_i < x_i)$).

$$X_t^i = \sqrt{\rho}B_t^g + \sqrt{1-\rho}B_t^i \quad (i = 1,\cdots,N\ ,\ \rho \in [0,1])$$

全てが単一の相関係数 ρ ということではなく，トランシェ$[\kappa,k]$ 毎にインプライド相関 $\rho_{\kappa,k}$（各エクイティ・トランシェ$[0,k]$ ではベース相関 ρ_k）を定めるが，このとき,「コリレーション・スキュー」がマーケットで観測される．言い換えれば，B-S モデルにせよ，コピュラ・モデルにせよ，市場価格を翻訳するため，インプライド・ベースでのパラメータを使ったコミュニケーションが確立しているという事実に過ぎない訳で[66]，背後にどのモデルが実際に用いられているか，というのはまた別の話である．

---

[61] グリークス (greeks) 計算法の一種，path-wise greek 法を意味する．別の数値解法として，ウェイトの重み付けと測度変換のアイディア（importance sampling に似た）likelihood ratio 法もあり，いずれもモンテカルロ法での greeks 計算法としてよく知られる．前者について smork adjoint 法，後者について Malliavin greeks 等の発展形もある（[16]）.

[62] 元来は，$dS_t = \sigma_t S_t^{\beta} dW_t$ であり，$\beta = 0, 1$ のケースが典型的．平均回帰性（OU 過程）を入れたり，スケール関数や，混合正規分布などを導入するケースもある．

[63] 対数正規の BS モデルでの IV について摂動し，漸近的な挙動を示した吉田公式を用いる近似もある．尚，LV，SV は対立的な概念ではなく，確率的 LV モデル (SLV) もありえる．

[64] 多くの金融資産では negative skew なので，$\rho \le 0$ であるが，いくつかの為替やコモディティ等では positive skew（$\rho > 0$）であり，このとき，X_t はマルチンゲールにならない．尚，Heston や SABR などの典型的な SV は，IV サーフェスを補間/補外する pre-calibration のために供され，第二段階で別途 LV 等で計算する手法もポピュラーな手法の一つ．

[65] コピュラ・モデルは静的なモデルであり，第 i 銘柄のデフォルト時刻 τ_i は指数分布（一定の intensity λ_i での Poission 過程）を仮定する．コピュラでは整合的な相関構造のある動的なダイナミクスを導入し難いとされる．

[66] メザニン・トランシェやコール・スプレッドは，各々相関 ρ やボル σ について単調増加でないため，二価になりえる．このため，エクイティ・トランシェ毎のインプライド相関（ベース相関と言う）を定めるのが標準的である．実際，Gamma モデルや Variance Gamma など Lévy 過程を用いたモデルもある（分布の裾が正規分布より厚い（fat-tail））.

第七の例は，Lévy 過程の中で，純粋 jump 過程として典型例の Gamma 過程 $\Gamma(t;\gamma,\lambda)$ である．Lévy 測度：$\nu(x)=\gamma x^{-1}\exp[-\lambda x]\,(x>0)$ とし，γ は発生率を λ はジャンプ幅を表す．ポートフォリオの相関構造を記述するため，

$$X_t^i=-\Gamma_g(t;\phi\gamma,\lambda)-\Gamma_i(t;\phi(1-\gamma),\lambda)$$

等とモデル化する（添字 g は global，i は idiosyncratic の意味）．Gamma モデルの中には様々なバージョンがあり，典型例の一つは，Variance Gamma 過程であり（c.f. Brown 運動 W_t として拡散過程の成分も加算できる）：時間変更（time change）を用いて，$VG(t;\gamma,\lambda,\overline{\lambda})=W(A_t)+\mu A_t$ と表される．但し，A_t は $\Gamma(t;\gamma,\frac{1}{2}\lambda\overline{\lambda})$，$\mu=\frac{1}{2}\left(\lambda-\overline{\lambda}\right)$ と置く[67]．

2.2.2 測度変換再訪

リスク中立測度空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{Q})$ に於ける，金融指標や資産価格のダイナミクスを記述する標準 Brown 運動を W_t とし，$\mathcal{F}_t=\sigma\left(W_u,u\le t\right)$ とする[68]．

定理 1
無裁定な完備市場に於いて，ヨーロピアン型デリバティブの価格を V_t とし，$\mathcal{F}_t$-適合で取引可能で正値な資産 A_t，B_t を各々ニューメレール（numéraire，基準財）とする同値マルチンゲール測度を $\mathcal{Q}^A$，$\mathcal{Q}^B$ とおくと，次式が成り立つ．

$$V_t=A_tE^{\mathcal{Q}^A}\left[\left.\frac{V_T}{A_T}\right|\mathcal{F}_t\right]=B_tE^{\mathcal{Q}^B}\left[\left.\frac{V_T}{B_T}\right|\mathcal{F}_t\right]$$

$\mathcal{Q}^A$ と同値な測度 $\mathcal{Q}^B$ の下で，相対価格 $V_t^{*B}=V_t/B_t$ は martingale, 即ち，$V_t^{*B}=E^{\mathcal{Q}^B}\left[\,V_T^{*B}\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right]$ $(0\le t\le T)$ である（A についても同様）．V_t の代わりに A_t を代入した式も成り立つ．ここで，RND(Radon-Nikodym Derivative)：

$$\left(\frac{d\mathcal{Q}^A}{d\mathcal{Q}^B}\right)_{t,T}=\frac{A_T}{B_T}\frac{B_t}{A_t}=\frac{A_T/B_T}{E^{\mathcal{Q}^B}\left[\,A_T/B_T\mid\mathcal{F}_t\right]}$$

は well-defined でなければならない．つまり，$\mathcal{Q}^A$ と $\mathcal{Q}^B$ は同値な測度（互いに絶対連続——即ち，零集合を共有する）でなければならない[69]．$M=\frac{d\mathcal{Q}^A}{d\mathcal{Q}^B}$ として，$M_T=M_t\times M_{t,T}$ は自明である．

例えば，配当の無い株式（あるいは配当含みの原資産）のスポット価格：$A_t\equiv S_t$，リスクフリー資産：$B_t\equiv N_t$ と置けば，$\mathcal{Q}^A=\tilde{\mathcal{Q}}$，$\mathcal{Q}^B=\mathcal{Q}$ ということになり[70]，

$$S_t=f_t\left(\frac{d\tilde{\mathcal{Q}}}{d\mathcal{Q}}\right)_{0,t}\qquad\left(f_t=E^{\mathcal{Q}}\left[\,S_t\,\right]\right)$$

この他にも，価格付けに於ける同値なマルチンゲール測度変換には様々な応用例があり，

- 外国為替（邦貨/外貨のリスク中立投資家の変更），クオント（quanto）・オプション

[67]時間変更を用いて，Brown 運動（つまり，Gaussian）の諸性質を応用すると，数値計算上の便宜になる．
[68]零集合 $\mathcal{N}$ を加えた零拡大 $\mathcal{F}_t=\sigma(B_u,u\le t)\vee\mathcal{N}$ とするときもある．
[69]任意の事象 $D\in\mathcal{F}$ について，$\mathcal{Q}^A(D)=0$ if and only if $\mathcal{Q}^B(D)=0$ が成り立つ．
[70]勿論，V_t を複製する，許容可能な自己金融取引を構成しても導ける．リスク資産（原資産）S_t とリスクフリー資産 N_t として，$(\psi_t,\phi_t)\in\mathcal{L}^2_{0,T}$, s.t. $V_t=\psi_tS_t+\phi_tN_t$．微小時間変化を取ると，$dV_t=\psi_tdS_t+\phi_tdN_t$ が成り立つ（相対価格ベース：$dV_t^*=\psi_tdS_t^*$）．これは自己金融取引が，離散近似では，$d\psi_t\left(S_t+dS_t\right)+d\phi_t\left(N_t+dN_t\right)=0$．であることから示される．

- CMT のコンベクシティ調整（convexity adjustment）
- 実質債/名目債の変更

等で用いられる．

第八の例として市場に n 個の取引可能資産（asset）が市場に存在する場合を考える．即ち，X^i を配当のない取引可能資産の価格過程とする（配当がある場合は，配当含みの価格過程）．リスク中立測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{Q})$ での n 次元の（直交した）標準 Brown 運動を W_t とし，それに対する一定のボラティリティ行列 σ_i として，幾何 Brown 運動；$\frac{dX_t^i}{X_t^i} = rdt + \sigma_i \cdot dW_t$ に従うとする[71]．このとき，リスク中立測度 $\mathcal{Q}$ と同値な測度 $\mathcal{Q}^i$ への RND は，

$$\left.\frac{d\mathcal{Q}^i}{d\mathcal{Q}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \mathcal{E}_{\sigma^i}(W_t) = \exp\left[\sigma_i \cdot W_t - \frac{1}{2}\langle\, \sigma_i \cdot W_t \,\rangle\right]$$

となる．C-M-G 定理より，同値な測度 $\mathcal{Q}^i$ の下では $W_t^i = W_t - \sigma_i t$ は n 次元標準 Brown 運動になる．測度 $\mathcal{Q}^i$ は，X_t^i を基準財とする，$\mathcal{Q}$ と同値なマルチンゲール測度であることが示される．実際，相対価格 $Z_t = X_t^j / X_t^i$ を伊藤公式に代入すれば，

$$\begin{aligned} \frac{dZ_t}{Z_t} &= \left(\frac{dX_t^j}{X_t^j} - \frac{dX_t^i}{X_t^i}\right) - \left\langle \left(\frac{dX_t^j}{X_t^j} - \frac{dX_t^i}{X_t^i}\right), \frac{dX_t^i}{X_t^i} \right\rangle \\ &= (\sigma_j - \sigma_i) \cdot dW_t^i \qquad \left(dW_t^i = dW_t - \sigma_i dt\right) \end{aligned}$$

を得る．したがって，Z_t は測度 $\mathcal{Q}^i$ の下で指数マルチンゲールである．

$$Z_t = \mathcal{E}_{(\sigma_j - \sigma_i)}(W_t^i) = \exp\left[(\sigma_j - \sigma_i) \cdot W_t^i - \frac{1}{2}\left\langle\, (\sigma_j - \sigma_i) \cdot W_t^i \,\right\rangle\right]$$

第九の例は，外国為替であり，邦貨，外貨のリスクフリー資産の瞬間スポットレート金利を各々，r_t^d，r_t^f とする．このとき，W_t を邦貨のリスク中立測度 $\mathcal{Q}^d$ で見た標準 Brown 運動 W_t を用いて，為替レート（1 外貨当たりの邦貨の換算）の過程は，$\frac{dX_t}{X_t} = \left(r_t^d - r_t^f\right) dt + \sigma dW_t$ と表される．ドリフトは内外金利差である[72]．伊藤公式から，

$$\frac{dX_t^{-1}}{X_t^{-1}} = -\frac{dX_t}{X_t} + \left\langle \frac{dX_t}{X_t} \right\rangle = \left(r_t^f - r_t^d\right) dt - \sigma d\tilde{W}_t$$

但し，$d\tilde{W}_t = dW_t - \sigma dt$ であり，外貨のリスク中立測度 $\mathcal{Q}^f$ の下で，$\tilde{W}_t$ が標準 Brown 運動である．この測度変換を通じて為替レートについての対称な関係式を得られ，為替を乗じるとは，基準財を邦貨建のリスクフリー資産から外貨建のリスクフリー資産への変換を意味することが分かる．

第十の例は，例えば，確率的な連続複利の瞬間スポットレート金利 r_t を考えるとき，リスク中立測度 $\mathcal{Q}$ の下では r_t で運用する（デフォルト・フリーな）銀行預金勘定 N_t がニューメレール（基準財，muméraire）である．このとき，満期 T で 1 円を支払う割引債は，金利デリバティブと見なせる．したがって，フォワード割引債価格 $P(t,T) = E^{\mathcal{Q}}[\, N_t/N_T \mid \mathcal{F}_t\,]$ も確率的であって，割引債 $P(t,T)$ とアニュイティ（annuity）$A_{n,m}$ のそれぞれをニューメレールとする同値マルチンゲール

[71] 容易に想像付く様に，指数 Lévy 過程に拡張される．更に，一般の半マルチンゲールの枠組で「資産価格付けの基本定理」を導けるが，数学的に厳密な難解な議論になる．

[72]（確率的な意味での）金利裁定によって，上式が導かれる．尚，確率的金利が為替や株と相関のある場合は，(drift を経由して）為替や株にもスキュー構造が入り，(大域的には）もはや対数正規ではなくなる．

測度を各々，フォワード測度 $\mathcal{Q}^T$，スワップ測度 $\mathcal{Q}^{n,m}$ として，任意の可積分で可測なデリバティブ価格 U に対して，

$$\begin{aligned} U_t &= N_t\, E^{\mathcal{Q}}\left[\left.\frac{U_T}{N_T}\,\right|\,\mathcal{F}_t\right] \quad \left(N_t = \exp\left[\int_0^t r_u du\right]\right) \\ &= P(t,T)\, E^{\mathcal{Q}^T}\left[\left.\frac{U_T}{P(T,T)}\,\right|\,\mathcal{F}_t\right] = A_{n,m}(t)\, E^{\mathcal{Q}^{n,m}}\left[\left.\frac{U_T}{A_{n,m}(T)}\,\right|\,\mathcal{F}_t\right] \end{aligned}$$

となり，異なった方式で同等な表現ができる．実測度 $\mathcal{P}$ では，確率的ディスカウントファクター SDF の記述が基準財の様に簡潔には書き下せないので，通常，価格評価式には直接使われることはない．しかし，実測度での確率的な時間発展がリスクの源泉なので，裁定ポジションでない限り（つまり，エクスポージャーがあるならば）原則，実測度でのリスク計測を要する．近年は，Chicago 学派（実証経済）を中心に SDF の研究も盛んで，確率制御や動的最適化問題が研究されている．

先般の信用収縮と金融危機以降，証券化商品や仕組債（structured products）のニーズは相対的に低まっているが，既存のポジション・リスクや取引戦略としては相変わらず重要な位置を占めている——エキゾティックよりもプレーンバニラや定型商品に重きが置かれる．また，PI（ポートフォリオ・インシュランス）の変形あるいは取引戦略の指数化などが検討される．また，デリバティブを用いたヘッジ戦略や資本配分の効率化，保険を含めたリスク理論，不動産，コモディティ，グリーン・エネルギーなど，金融高度化の要請は以前にも増して高まっており，数理ファイナンスの果たすべき役割も潜在的に大きくなっているのである．

冒頭，数理ファイナンスは応用数学の一分野と見なされていると述べたが，そこには確率論，統計学のみならず，幾何や代数，関数解析，微分方程式論，最適化など多様な数学が扱われている[73]．純粋数学との接点も多い．例えば，デリバティブの価格付けや動的ポートフォリオ最適化等は，漸近展開・マリアヴァン解析や楠岡近似といった先端的な数学の応用先として興味深い対象である．リスク測度では[74]，最適化や確率解析そして古典的な数理統計学やリスク学との融合が図られる．確率論はラプラスの時代から，賭事のための数学として発達してきた．そもそも当時から確率論の動機付けは物理学などの自然現象ではなく，人間の織りなす社会活動の一環としての研究だった（趣味・趣向といった要素が大きかったであろうが）．今日，確率論は数学の中でも学際的であり，PDE の確率的アプローチのみならず，統計物理，関数解析（半群理論）や微分幾何（リーマン幾何），リーマン・ゼータ関数への適用など幅広いものがある（[38]）．その中でもファイナンスは，動機や応用先ということだけでなく，確率論や関数解析と親和性が高い．

不可思議な感じであるが，ファイナンスの分野では，一昔前の物理数学のように数学的に本質的な問題やイノベーションをもたらす問題に事欠かない．実務的という意味では覚束ない主題も多いが，それでも数学は役に立つ——些か逆説的だが，一般の人々が感じている以上に，但し違ったニュアンスで．

---

[73] 特に，確率論と関数解析に基づいた数学を援用するのであるが，関数解析や PDE の世界と（確率論）測度論の世界では，線形形式やノルムなどの有界性やコンパクト性について異なるニュアンスがあるので（無限領域の扱い方の相違，片方には分布がある），若干異なった知識を要する（多くの点で類似の問題も共有する）．

[74] リスク測度をいかに整合的に定義できるか，コヒーレント性があるかは重要ではあるが，動的な枠組では難解である．そもそも VaR はコヒーレント（coherent）ではない（大体，VaR は経営の気休め指標程度のものであるが）．プライシングは評価測度が同値マルチンゲール測度であるが，リスク（及び観測された事象）については実測度の問題である．実務家が両者の測度を混同しがちなのは問題含みである（勿論，二者択一という議論ではない）．

参考文献

[1] Andersen, L. and V. Piterbarg (2010) *Interest Rate Modeling, Vol.I-III.* Atlantic Fin. Press.

[2] Baxter, M. and A. Rennie (1997) *Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing.* Cambridge. バクスター-レニー (著) 藤田岳彦-塩谷匡介-高岡浩一郎 (訳) (2001) 「デリバティブ価格理論入門」. シグマベイスキャピタル.

[3] Bielecki, T. and M. Jeanblanc, M. Rutkowski (2009) *Credit Risk Modeling.* 大阪大学金融・保険レクチャーノートシリーズ.

[4] Birge, J. and V. Linetsky (Ed.) (2008) *Financial Engineering.* North-Holland. 木島正明 (監訳) (2009) 「金融工学ハンドブック」. 朝倉書店.

[5] Brigo, D. and F. Mercurio (2007) *Interest Rate Models——Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit.* Springer.

[6] Black, F. and M. Scholes (1973) *The pricing of options and corporate liabilities.* J. Poli. Eco.

[7] Bourbaki, N. (1968) *Elements of Mathematics.* Springer. ブルバキ「数学原論」. 東京図書.

[8] Carmona, R. and M. Tehranchi (2006) *Interest Rate Models: an Infinite Dimensional Stochastic Analysis Perspective.* Springer.

[9] Cont, R. (Ed.) (2008) *Frontiers in Quantitative Finance.* Wiley.

[10] Delbaen, F. and W. Schachermayer. (2001) *Applications to Mathematical Finance.*

[11] Duffie, D. (2001) *Dynamic Asset Pricing Theory (3rd. Ed.).* Princeton. ダフィー (著), 山崎昭-桑名陽一-大橋和彦-本多俊毅 (訳) 「資産価格の理論———株式・債券・デリバティブのプライシング」. 創文社.

[12] Filipovic, G. (2009) *Term-Structure Models: A Graduate Course.* Springer.

[13] Föllmer, H. and A. Schied (2004) *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time, 2nd Ed.* De Gruyter Studies in Math.

[14] Friz, P. and N. Victoir (2010) *Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths: Theory and Applications.* Cambridge.

[15] Geman, H. (2007) *Commodity and Commodity Derivatives.* Wiley. エリエッテ・ジュマン (著) 野村證券・野村総合研究所 事業リスク研究会 (訳) (2007) 「コモディティ・ファイナンス」. 日経 BP.

[16] Giles, M. (2009) *Research on Monte Carlo Methods.*

[17] Glasserman, P. (2003) *Monte Carlo Methods in Financial Engineering.* Springer.

[18] Hobson, D. (2004) *A Survey of Mathematical Finance.* Royal Soc. A.

[19] Itô, K. (1960) *Stochastic Processes: Lectures given at Aarhus University.* Springer. 伊藤清 (著), Barndorff-Nielsen, 佐藤健一 (編), 佐藤由身子 (訳) (2009) 「確率過程ーオルフス大学講義録」Springer.

[20] Jarrow. R. and P. Protter (2004) *A short history of stochastic integration and mathematical finance the early years, 1880—1970*. IMS Lec. Note. Mono.

[21] Jeanblanc, M. and M. Yor, M. Chesney (2009) *Mathematical Methods for Financial Markets*. Springer Finance.

[22] Karatzas, I. and S. Shreve (2001) *Methods of Mathematical Finance*. Springer.

[23] Kohatsu-Higa, A. and M. Montero (2004) *Malliavin Calculus in Finance*. Birkhauser

[24] Malliavin, P. and A. Thalmaier (2005) *Stochastic Calculus of Variations in Mathematical Finance*. Springer.

[25] Merton, R. (1995) *A Functional Perspective of Financial Intermediation*.

[26] Mehrling, P. (2005) *Fischer Black and the Revolutionary Idea of Finance*. Wiley. メーリング (著) 今野浩-村井章子 (訳) (2006) 「金融工学者フィッシャー・ブラック」. 日経 BP.

[27] Pham, P. (2009) *Continuous-time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications*. Springer.

[28] Profeta, C. and B. Roynette, M. Yor (2010) *Option Prices as Probabilities: A New Look at Generalized Black-Scholes Formulae*. Springer Finance.

[29] Rogers, L.C.G. and D.Williams (1987). *Diffusions, Markov Processes and Martingales I. & II., 2nd Ed.* Cambridge.

[30] Shigekawa, I. (2004) *Stochastic Analysis*. AMS. Trans. Math. Monographs. vol. 224. 重川一郎 (2008) 「確率解析」. 岩波.

[31] Steele, J. (2003) *Stochastic Calculus and Financial Applications*. Springer.

[32] Taleb, N. (2008) *The Black Swan: The Impact of the Highly Improbable*. Random House. タレブ (著) 望月衛 (訳) (2008,10) 「ブラック・スワン *(上/下)*——不確実性とリスクの本質」, 「強さと脆さ」. ダイヤモンド社.

[33] Yor, M. (Ed.) (2008) *Aspects of Mathematical Finance*. Springer Finance.

[34] 相田洋-藤波重成 (2007) 「マネー革命 *1〜3 (NHK スペシャル)*」. 日本放送協会.

[35] 大本隆 (2007) 「デリバティブ・プロダクツの価格付け——数理ファイナンスの基礎と応用」.

[36] 国友直人-高橋明彦 (2003) 「数理ファイナンスの基礎——マリアバン解析と漸近展開の応用」東洋経済.

[37] 関根順 (2007) 「数理ファイナンス」. 培風館.

[38] 藤田岳彦 (2009) 「離散確率解析とその周辺——ブラック・ショールズからリーマン・ゼータまで」.

[39] 渡辺信三「確率解析の歴史と展望——伊藤清先生の業績について」, 楠岡成雄「数理科学とファイナンスの展望」, その他. 京都大学「伊藤清博士ガウス賞受賞記念（野村グループ）寄附研究部門」創設記念コンファレンス. (2007)

当社で取り扱う商品等へのご投資には、各商品等に所定の手数料等（国内株式（国内 REIT、国内 ETF を含む）取引の場合は約定代金に対して最大 1.365％（税込み）（20 万円以下の場合は、2,730 円（税込み））の売買手数料、投資信託の場合は銘柄ごとに設定された販売手数料および信託報酬等の諸経費、等）をご負担いただく場合があります。また、各商品等には価格の変動等による損失が生じるおそれがあります。商品毎に手数料等およびリスクは異なりますので、当該商品等の契約締結前交付書面、上場有価証券等書面、目論見書、等をよくお読みください。

国内株式（国内 REIT、国内 ETF を含む）の売買取引には、約定代金に対し最大 1.365％（税込み）（20 万円以下の場合は 2,730 円（税込み））の売買手数料をいただきます。国内株式（国内 REIT、国内 ETF を含む）を相対取引（募集等を含む）によりご購入いただく場合は、購入対価のみお支払いいただきます。ただし、相対取引による売買においても、お客様との合意に基づき、別途手数料をいただくことがあります。国内株式（国内 REIT、国内 ETF を含む）は株価の変動により損失が生じるおそれがあります。

外国株式の売買取引には、売買金額（現地約定金額に現地手数料と税金等を買いの場合には加え、売りの場合には差し引いた額）に対し最大 0.9975％（税込み）（売買代金が 75 万円以下の場合は最大 7,455 円（税込み））の国内売買手数料をいただきます。外国の金融商品市場での現地手数料や税金等は国や地域により異なります。外国株式を相対取引（募集等を含む）によりご購入いただく場合は、購入対価のみお支払いいただきます。ただし、相対取引による売買においても、お客様との合意に基づき、別途手数料をいただくことがあります。外国株式は株価の変動および為替相場の変動等により損失が生じるおそれがあります。

ＣＢの売買取引には、約定代金に対し最大 1.05％（税込み）（4,200 円に満たない場合は 4,200 円（税込み））の売買手数料をいただきます。ＣＢを相対取引（募集等を含む）によりご購入いただく場合は、購入対価のみお支払いいただきます。ただし、相対取引による売買においても、お客様との合意に基づき、別途手数料をいただくことがあります。ＣＢは転換もしくは新株予約権の行使対象株式の価格下落や金利変動等によるＣＢ価格の下落により損失が生じるおそれがあります。加えて、外貨建てＣＢは、為替相場の変動等により損失が生じるおそれがあります。

債券を募集・売出し等その他、当社との相対取引によってご購入いただく場合は、購入対価のみお支払いいただきます。債券の価格は市場の金利水準の変化に対応して変動しますので、損失が生じるおそれがあります。加えて、外貨建て債券は、為替相場の変動等により損失が生じるおそれがあります。

信用取引には、売買手数料（約定代金に対し最大 1.365%（税込み）（20 万円以下の場合は 2,730 円（税込み）））、管理費および権利処理手数料をいただきます。加えて、買付の場合、買付代金に対する金利を、売付けの場合、売付け株券等に対する貸株料および品貸料をいただきます。委託保証金は、売買代金の 30%以上で、かつ 30 万円以上の額が必要です。信用取引では、委託保証金の約 3.3 倍までのお取引を行うことができるため、株価の変動により委託保証金の額を上回る損失が生じるおそれがあります。詳しくは、上場有価証券等書面、契約締結前交付書面、等をよくお読みください。

株価指数先物取引には、取引手数料（約定代金に対し最大 0.084%（税込み））をお支払いいただきます。株価指数オプション取引には、取引手数料（約定代金に対し最大 4.200%（税込み）（2,625 円に満たない場合は、2,625 円））をお支払いいただきます。また、所定の委託証拠金が必要となります。委託証拠金は、ＳＰＡＮにより、先物・オプション取引全体の建玉から生じるリスクに応じて計算されますので、株価指数先物・オプション取引の額の証拠金に対する比率を事前に示すことができません。株価指数先物・オプション取引の価格は、対象とする株価指数の変動等の影響により上下しますので、委託保証金の額を上回る損失が生じるおそれがあります。詳しくは、上場有価証券等書面、契約締結前交付書面、等をよくお読みください。

店頭デリバティブ取引に当たっては、所定の支払日における所定の支払金額、のみお支払いただきます。各商品の評価額は、組み入れた投資対象のデフォルト有無や信用リスクの水準、金利水準、金融指標の変動等により変化し、評価損が発生する場合があります。各商品が取引終了日の前に中途で解約された場合には、この評価損が現実化することや、解約に伴う諸費用が発生することにより、損失を被る場合があります。また、デフォルトや信用リスク水準等の金融市場における相場その他の指標にかかる変動に伴い、追加で担保を差入れて頂く必要が生じる場合があります。当社の業務や財産の状況が悪化した場合に、当社が店頭デリバティブ取引に基づく義務を履行できなくなることにより、お客様に損失が生じる場合があります。詳しくは、契約締結前交付書面をよくお読みください。

野村證券株式会社
金融商品取引業者　関東財務局長（金商）　第 142 号
加入協会／日本証券業協会、（社）日本証券投資顧問業協会、（社）金融先物取引業協会